Appendix 4.A Transf. de Fourier en Temps Continu : Propriétés

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \longleftrightarrow \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Propriété	**Signal**	**Transformée de Fourier**
Linéarité	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$
Décalage temporel	$x(t - t_0)$	$e^{-jt_0\omega}X(\omega)$
Décalage en fréquence	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Changements d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Retournement temporel	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Différentiation temporelle	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j\omega)^n X(\omega)$
Différentiation en fréquence	$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega)$
Intégration temporelle	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega)$, en supposant que $X(0) = 0$.
Convolution dans le temps	$(x * y)(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Convolution en fréquence	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(\omega)$
Conjugué	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Conjugué et retournement temporel	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$
Symétrie conjuguée	$x(t)$ réel	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ ce qui implique que $\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$
	$x(t)$ réel and pair *i.e.*, $x(t) = x(-t)$	$X(\omega)$ réel et pair *i.e.*, $X(\omega) = X(-\omega)$
Egalité de Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$	

Appendix 4.B Transformée de Fourier en Temps Continu : Paires

	Signal	**Transformée de Fourier**
Fonction delta de Dirac	$x(t) = \delta(t)$ $x(t) = \delta(t - t_0)$	$X(\omega) = 1$ $X(\omega) = e^{-jt_0\omega}$
Peigne de Dirac	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
Fonction constante Harmoniques	$x(t) = 1$ $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ $x(t) = \sin(\omega_0 t)$	$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ $X(\omega) = \pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)$ $X(\omega) = \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right)$
Fonction échelon	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$	$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Exponentielle unilatérale avec $Re(a) > 0$ pour les entiers $n \geq 2$	$x(t) = e^{-at}u(t)$ $x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$	$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$ $X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$
Exponentielle bilatérale	$x(t) = e^{-a\|t\|}$ avec $Re(a) > 0$	$X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
Fonction sinus cardinal	$x(t) = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_0}{2\pi} t\right)$ où $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$	$X(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0}}, & \|\omega\| \leq \frac{1}{2}\omega_0 \\ 0, & sinon. \end{cases}$
Fonction boîte (rectangle)	$b(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t_0}}, & \|t\| \leq \frac{1}{2} t_0, \\ 0, & sinon. \end{cases}$	$B(\omega) = \sqrt{t_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{t_0}{2\pi}\omega\right)$

Appendix 4.C Transformée de Fourier en temps discret : Propriétés

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega \quad \longleftrightarrow \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Propriété	Signal	Transformée de Fourier
Linéarité	$\alpha x[n] + \beta y[n]$	$\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$
Décalage dans le temps	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(\omega))$
Décalage en fréquence	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(\omega - \omega_0)$
Retournement temporel	$x[-n]$	$X(-\omega)$
Différenciation en fréquence	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$
Convolution dans le temps	$(x * y)[n]$	$X(\omega)Y(\omega)$
Convolution circulaire en fréquence	$x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\theta)Y(\omega - \theta))d\theta$
Conjugaison	$x^*[n]$	$X^*(-\omega)$
Conjugaison, inversée dans le temps	$x^*[-n]$	$X^*(\omega)$
Symétrie conjuguée	$x[n]$ réel	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ ce qui implique $\lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert$
	$x[n]$ réel et paire *i.e.*, $x[n] = x[-n]$	$X(\omega)$ réel et paire *i.e.*, $X(\omega) = X(-\omega)$

Relation de Parseval pour les Signaux Apériodiques

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Appendix 4.D Transformée de Fourier en temps discret : Paires

	Signal	**Transformée de Fourier**
Delta de Kronecker	$\delta[n]$ $\delta[n-n_0]$	1 $e^{-jn_0\omega}$
Constante Harmoniques	$x[n]=1$ $x[n]=e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi l)$ $2\pi\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$
Fonction échelon	$u[n]=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\omega-2\pi k)$
Exponentielle unilatérale	$x[n]=\begin{cases}\alpha^n, & n\geq 0\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$ avec $\|\alpha\|<1$	$\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$
"Arithmético-géométrique"	$x[n]=\begin{cases}n\alpha^n, & n\geq 0\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$ avec $\|\alpha\|<1$	$\dfrac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$
Suite de sinus cardinal	$\sqrt{\dfrac{\omega_0}{2\pi}}\,\text{sinc}\left(\dfrac{\omega_0}{2\pi}n\right)$ où $\text{sinc}(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$	$X(\omega)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0}}, & \|\omega\|\leq\frac{1}{2}\omega_0\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$
Suite rectangulaire	$x[n]=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n_0}}, & \|n\|\leq\frac{1}{2}(n_0-1),\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$ où n_0 est impair	$\sqrt{n_0}\dfrac{\text{sinc}\left(\frac{n_0}{2\pi}\omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right)}$